فهرست

بخش دوم: دربارهٔ گودِل

حوزه‌های متعدد و بااهمیتی از ریاضیات امکان‌پذیر نیست، و هیچ‌گونه تضمین مطلقاً کاملی وجود ندارد که شاخه‌های متعدد و بااهمیتی از تفکر ریاضی به‌طور کامل از تناقض‌های درونی عاری باشند.

بدین ترتیب یافته‌های گودِل تصورات پیشین و عمیقاً ریشه‌داری را متزلزل کرد و امیدهای کهنی را بر باد داد که پژوهش در مورد بنیادهای ریاضیات به‌تازگی به آن‌ها دامن زده بود. اما این مقاله تمام و کمال منفی نبود. شیوه جدیدی از تحلیل را در مطالعه پرسش‌های بنیادی باب کرد که ماهیت و خلاقیت مشابهی با آن روش جبری دارد که رنه دکارت در هندسه باب کرد. این روش مسائل جدیدی را پیش روی پژوهش منطق و ریاضی گذاشت. و به ارزیابی دوباره فلسفه‌های ریاضیات مورد قبول همگان، و فلسفه‌های دانش به‌طور کلی، دامن زد.

دنبال کردن جزییات اثبات‌های گودِل در این مقاله دوران‌ساز بدون برخورداری از دانش ریاضی گستردهٔ کاری بسیار دشوار است. اما ساختار بنیادی استدلال‌ها و جوهر نتیجه‌گیری‌های او را می‌توان برای خوانندگانی که آمادگی بسیار محدودی در ریاضی و منطق دارند قابل فهم کرد. برای رسیدن به چنین فهمی از موضوع، ضروری است که خواننده برداشت مختصری از پاره‌ای دگرگونی‌ها در تاریخ ریاضیات و منطق صوری جدید را به‌دست آورد. چهار فصل بعدی این جستار[1] به بررسی این موضوع اختصاص دارند.

1. essay

۲

مسئلهٔ سازگاری[1]

قرن نوزدهم شاهد گسترش و تعمیق بی‌نظیر پژوهش در ریاضیات بود. بسیاری از مسائل بنیادی که مدت‌ها در مقابل بهترین تلاش‌های متفکران پیشین تاب آورده بودند حل شدند؛ حوزه‌های جدیدی از مطالعهٔ ریاضی شکل گرفتند؛ و در شاخه‌های مختلفی از این رشته بنیان‌های نوینی نهاده شدند، یا با کمک روش‌های دقیق تحلیل[2] بنیان‌های کهنه شکل کاملاً تازه‌ای یافتند. یک مثال: یونانی‌ها سه مسئله را در هندسه مقدماتی مطرح کرده بودند: تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی با پرگار و خط‌کش؛ ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم یک مکعب مفروض باشد، و ساختن مربعی که سطح آن مساوی با سطح یک دایره مفروض باشد. برای حل این مسائل دو هزار سال تلاش ناموفق صورت گرفته بود؛ سرانجام، در قرن نوزدهم اثبات شد که حل آن‌ها به‌لحاظ منطقی غیرممکن است. از

1. consistency
2. analysis

این گذشته، این تلاش‌ها محصول جانبی ارزشمندی داشتند. چون راه‌حل‌ها اساساً وابسته به تعیین نوع ریشه‌هایی هستند که در معادله‌های معین صدق می‌کنند، دلمشغولی به این تکلیف‌های مشهور به‌جامانده از دوران باستان به پژوهش عمیقی در طبیعت اعداد و ساختار پیوستار[1] اعداد دامن زد. سرانجام تعریف‌های منسجمی برای اعداد منفی، مختلط[2]، و گنگ[3] فراهم شد؛ بنیانی منطقی برای نظام اعداد حقیقی[4] ساخته شد؛ و شاخه نوینی از ریاضیات، نظریهٔ اعداد نامتناهی، پایه‌ریزی شد.

اما شاید مهم‌ترین تحول، از نظر تأثیرات پردامنه آن بر تاریخ بعدی ریاضیات، حل مسئله دیگری بود که یونانی‌ها بی‌پاسخ گذارده بودند. یکی از اصل‌هایی که اقلیدس در نظام‌مند کردن[5] هندسه به‌کار گرفت مربوط به خطوط موازی[6] بود. اصلی که او اختیار کرد به لحاظ منطقی معادل با (گرچه نه عین) این فرض بود که از هر نقطه بیرون یک خط مفروض تنها می‌توان یک خط موازی با آن ترسیم کرد. به دلایل مختلف، از نظر یونانیان باستان این اصل «بدیهی[7]» نبود. از این رو، تلاش کردند که آن را از سایر اصل‌های اقلیدس استنتاج کنند که آن‌ها را به‌روشنی بدیهی به‌حساب می‌آوردند[8]. آیا چنین اثباتی در مورد

1. continuum 2. complex 3. irrational
4. real 5. systematizing 6. parallel
7. self-evident

۸ دلیل عمده این ادعا که این اصل بدیهی نیست این واقعیت است که اصل توازی درباره مناطق *بی‌نهایت* دورِ فضا امری را تصدیق می‌کند. اقلیدس خطوط ←

اصل توازی[1] امکان‌پذیر است؟ چندین نسل از ریاضی‌دانان بی‌نتیجه با این پرسش کلنجار رفتند. اما ناکامی مکرر در پی افکندن یک اثبات به این معنی نیست که یافتن آن امکان‌پذیر نیست، همان‌طور که ناکامی مکرر برای یافتن درمان سرماخوردگی عادی این را نشان نمی‌دهد که بشریت بی‌تردید برای همیشه از آب‌ریزش بینی رنج خواهد برد. تنها در قرن نوزدهم بود، که عمدتاً از طریق آثار گاوس[2]، بولایی[3]، لِباچفسکی[4]، و ریمان[5]، ***امکان‌ناپذیری***[6] استنتاج اصل توازی از سایر اصل‌ها نشان داده شد. این پیامد از اهمیت فکری فوق‌العاده‌ای برخوردار بود. نخست آن‌که، به شیوه‌ای بسیار چشمگیر توجه را به این واقعیت جلب کرد که می‌توان اثباتی را درباره ***امکان‌ناپذیری اثبات*** برخی گزاره‌ها در درون یک نظام مفروض فراهم کرد. همان‌طور که خواهیم دید، مقاله گودلِ اثبات این است که

→ موازی را به‌مانند خطوطی مستقیم در یک صفحه تعریف می‌کند که، «به‌طور نامتناهی در هردو جهت ادامه دارند» و یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند. از این رو، گفتن این‌که دو خط موازی هستند به‌معنی این ادعاست که این دو خط حتی «در بی‌نهایت» یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند. اما یونانیان باستان با خطوطی آشنا بودند که گرچه یک‌دیگر را در منطقه‌ای متناهی از سطح قطع نمی‌کنند، «در بی‌نهایت» یک‌دیگر را قطع می‌کنند. چنین خطوطی «مجانب» [asymptotic] نامیده می‌شوند. بر این اساس یک هذلولی مجانب محورهایش است. در نتیجه، برای هندسه‌دانان باستان به لحاظ شهودی بدیهی نبود که از یک نقطه بیرون یک خط مفروض تنها می‌توان یک خط مستقیم ترسیم کرد که حتی در بی‌نهایت آن خط را قطع نکند.

1. parallel axiom 2. Gauss 3. Bolyai
4. Lobachevsky 5. Rieman 6. impossibility